數學傳播　50卷1期, pp. 68-75

利用兩相鄰完全平方數來證明恆等式 $[\sqrt{9n+8}]=[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]$

李維昌

研究目的: 國立彰化師範大學數學系李錦鎣教授在文獻 [1] 提供恆等式 $[\sqrt{9n+8}]=[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]$ 的一種證法, 其中 $n\in N$, $[x]$ 代表小於或等於 x 的最大整數。本文試圖利用兩相鄰完全平方數來證明這個恆等式, 以下是證明的過程。

研究過程:

試證: $[\sqrt{9n+8}]=[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]$, $n\in N$.

證明:

一、我們先證明 $\sqrt{9n+8}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<\sqrt{9n+9}$, $n\in N$.

(一) 因爲 $9n+8=3n+3+2(3n+\frac{5}{2})=3n+3+2(n+\frac{a}{32})+2(n+\frac{b}{32})+2(n+\frac{c}{32})$, 其中 $a,b,c\in N$ 可推得 $\frac{5}{2}=\frac{80}{32}=\frac{a+b+c}{32}$, 選取六組 $(a,b,c)=(12,21,47)$ 或 $(12,22,46)$ 或 $(12,23,45)$ 或 $(12,24,44)$ 或 $(13,23,44)$ 或 $(13,22,45)$ 來測試, 必須滿足底下三個不等式

$$(n+\frac{a}{32})^2<n(n+1),\ (n+\frac{b}{32})^2<n(n+2),\ (n+\frac{c}{32})^2<(n+1)(n+2),$$

對所有的 $n\in N$ 都必須成立。但是, 如果 $a<16$ 時, 則 “$n\in N,\ (n+\frac{a}{32})^2<n(n+1)$”, 與 “$n\in N,\ n>(\frac{a}{32})^2/(1-\frac{a}{16})$” 相同, 因此只需要檢驗 $n=1$ 的情形。同理另兩個不等式也只要檢驗 $n=1$ 的情形。亦即, 當 $n=1$ 時, 必須滿足底下三個不等式

$$(1+\frac{a}{32})^2<1\cdot(1+1),\ (1+\frac{b}{32})^2<1\cdot(1+2),\ (1+\frac{c}{32})^2<(1+1)\cdot(1+2).$$

1° 將第一組 $(a, b, c) = (12, 21, 47)$ 代入上面三個不等式檢驗, 此時

$$(1+\frac{12}{32})^2 < 1\cdot(1+1),\ (1+\frac{21}{32})^2 < 1\cdot(1+2),\ (1+\frac{47}{32})^2 > (1+1)\cdot(1+2).$$

第三個不等式不成立, 這一組不是我們要的。

2° 將第二組 $(a, b, c) = (12, 22, 46)$ 代入檢驗, 此時

$$(1+\frac{12}{32})^2 < 1\cdot(1+1),\ (1+\frac{22}{32})^2 < 1\cdot(1+2),\ (1+\frac{46}{32})^2 < (1+1)\cdot(1+2).$$

三個不等式都成立, 這一組是我們要的。

3° 將第三組 $(a, b, c) = (12, 23, 45)$ 代入檢驗, 此時

$$(1+\frac{12}{32})^2 < 1\cdot(1+1),\ (1+\frac{23}{32})^2 < 1\cdot(1+2),\ (1+\frac{45}{32})^2 < (1+1)\cdot(1+2).$$

三個不等式都成立, 這一組是我們要的。

4° 將第四組 $(a, b, c) = (12, 24, 44)$ 代入檢驗, 此時

$$(1+\frac{12}{32})^2 < 1\cdot(1+1),\ (1+\frac{24}{32})^2 > 1\cdot(1+2),\ (1+\frac{44}{32})^2 < (1+1)\cdot(1+2).$$

第二個不等式不成立, 這一組不是我們要的。

5° 將第五組 $(a, b, c) = (13, 23, 44)$ 代入檢驗, 此時

$$(1+\frac{13}{32})^2 < 1\cdot(1+1),\ (1+\frac{23}{32})^2 < 1\cdot(1+2),\ (1+\frac{44}{32})^2 < (1+1)\cdot(1+2).$$

三個不等式都成立, 這一組是我們要的。

6° 將第六組 $(a, b, c) = (13, 22, 45)$ 代入檢驗, 此時

$$(1+\frac{13}{32})^2 < 1\cdot(1+1),\ (1+\frac{22}{32})^2 < 1\cdot(1+2),\ (1+\frac{45}{32})^2 < (1+1)\cdot(1+2).$$

三個不等式都成立, 這一組是我們要的。

(二) 將第二組 $(a, b, c) = (12, 22, 46)$ 轉換成

$$\Big(\frac{a}{32}, \frac{b}{32}, \frac{c}{32}\Big) = \Big(\frac{12}{32}, \frac{22}{32}, \frac{46}{32}\Big) = \Big(\frac{3}{8}, \frac{11}{16}, \frac{23}{16}\Big).$$

推得底下 (1) 式, (2) 式與 (3) 式

$$\begin{aligned}2\Big(n+\frac{3}{8}\Big) &= 2\sqrt{n^2+\frac{3}{4}n+\frac{9}{64}} < 2\sqrt{n^2+\frac{3}{4}n+\frac{n}{4}}\\ &= 2\sqrt{n(n+1)} < 2\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}} = 2\Big(n+\frac{1}{2}\Big),\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}2\Big(n+\frac{11}{16}\Big) &= 2\sqrt{n^2+\frac{11}{8}n+\frac{121}{256}} < 2\sqrt{n^2+\frac{11}{8}n+\frac{5}{8}n}\\ &= 2\sqrt{n(n+2)} < 2\sqrt{n^2+2n+1} = 2(n+1),\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}2\Big(n+\frac{23}{16}\Big) &= 2\sqrt{n^2+\frac{23}{8}n+\frac{529}{256}} < 2\sqrt{n^2+\frac{23}{8}n+(\frac{n}{8}+2)}\\ &= 2\sqrt{(n+1)(n+2)} < 2\sqrt{n^2+3n+\frac{9}{4}} = 2\Big(n+\frac{3}{2}\Big),\end{aligned}\tag{3}$$

其中利用了 “$n\in N$ 時, $\frac{9}{64}<\frac{n}{4}$, $\frac{121}{256}<\frac{5}{8}n$, $\frac{529}{256}<\frac{n}{8}+2$”,
所以 (1) 式+(2) 式+(3) 式可得

$$6n+5 < 2(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}) < 6n+6.$$

不等式同時加上 $3n+3$ 可得

$$9n+8 < 3n+3+2(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}) < 9n+9,$$

進而可推得

$$9n+8 < (\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})^2 < 9n+9.$$

開平方後我們證得

$$\sqrt{9n+8} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} < \sqrt{9n+9},\quad n\in N.$$

(三) 將第三組 $(a,b,c)=(12,23,45)$ 轉換成

$$\Big(\frac{a}{32},\frac{b}{32},\frac{c}{32}\Big)=\Big(\frac{12}{32},\frac{23}{32},\frac{45}{32}\Big)=\Big(\frac{3}{8},\frac{23}{32},\frac{45}{32}\Big),$$

推得底下 (1) 式, (4) 式與 (5) 式

$$\begin{aligned} 2\Big(n+\frac{3}{8}\Big) &= 2\sqrt{n^2+\frac{3}{4}n+\frac{9}{64}} < 2\sqrt{n^2+\frac{3}{4}n+\frac{n}{4}} \\ &= 2\sqrt{n(n+1)} < 2\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}} = 2\Big(n+\frac{1}{2}\Big), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 2\Big(n+\frac{23}{32}\Big) &= 2\sqrt{n^2+\frac{23}{16}n+\frac{529}{1024}} < 2\sqrt{n^2+\frac{23}{16}n+\frac{9}{16}n} \\ &= 2\sqrt{n(n+2)} < 2\sqrt{n^2+2n+1} = 2(n+1), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 2\Big(n+\frac{45}{32}\Big) &= 2\sqrt{n^2+\frac{45}{16}n+\frac{2025}{1024}} < 2\sqrt{n^2+\frac{45}{16}n+(\frac{3n}{16}+2)} \\ &= 2\sqrt{(n+1)(n+2)} < 2\sqrt{n^2+3n+\frac{9}{4}} = 2\Big(n+\frac{3}{2}\Big), \end{aligned} \tag{5}$$

其中利用了 "$n \in N$ 時, $\dfrac{9}{64} < \dfrac{n}{4}$, $\dfrac{529}{1024} < \dfrac{9}{16}n$, $\dfrac{2025}{1024} < \dfrac{3n}{16} + 2$",
所以 (1) 式 +(4) 式 +(5) 式可得

$$6n+5 < 2(\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n+2)} + \sqrt{(n+1)(n+2)}) < 6n+6.$$

不等式同時加上 $3n+3$ 可得

$$9n+8 < 3n+3+2(\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n+2)} + \sqrt{(n+1)(n+2)}) < 9n+9,$$

進而可推得

$$9n+8 < (\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})^2 < 9n+9,$$

開平方後我們證得

$$\sqrt{9n+8} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} < \sqrt{9n+9}, \quad n \in N.$$

(四) 將第五組 $(a, b, c) = (13, 23, 44)$ 轉換成

$$\Big(\frac{a}{32}, \frac{b}{32}, \frac{c}{32}\Big) = \Big(\frac{13}{32}, \frac{23}{32}, \frac{44}{32}\Big) = \Big(\frac{13}{32}, \frac{23}{32}, \frac{11}{8}\Big),$$

推得底下 (6) 式, (4) 式與 (7) 式

$$\begin{aligned}
2\Big(n+\frac{13}{32}\Big) &= 2\sqrt{n^2+\frac{13}{16}n+\frac{169}{1024}} < 2\sqrt{n^2+\frac{13}{16}n+\frac{3n}{16}} \\
&= 2\sqrt{n(n+1)} < 2\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}} = 2\Big(n+\frac{1}{2}\Big), \qquad (6)\\
2\Big(n+\frac{23}{32}\Big) &= 2\sqrt{n^2+\frac{23}{16}n+\frac{529}{1024}} < 2\sqrt{n^2+\frac{23}{16}n+\frac{9}{16}n} \\
&= 2\sqrt{n(n+2)} < 2\sqrt{n^2+2n+1} = 2(n+1), \qquad (4)\\
2\Big(n+\frac{11}{8}\Big) &= 2\sqrt{n^2+\frac{11}{4}n+\frac{121}{64}} < 2\sqrt{n^2+\frac{11}{4}n+(\frac{n}{4}+2)} \\
&= 2\sqrt{(n+1)(n+2)} < 2\sqrt{n^2+3n+\frac{9}{4}} = 2\Big(n+\frac{3}{2}\Big), \qquad (7)
\end{aligned}$$

其中利用了 “$n\in N$ 時, $\frac{169}{1024}<\frac{3n}{16}$, $\frac{529}{1024}<\frac{9}{16}n$, $\frac{121}{64}<\frac{n}{4}+2$”,
所以 (6) 式+(4) 式+(7) 式可得

$$6n+5<2(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)})<6n+6.$$

不等式同時加上 $3n+3$ 可得

$$9n+8<3n+3+2(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)})<9n+9,$$

進而可推得

$$9n+8<(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})^2<9n+9,$$

開平方後我們證得

$$\sqrt{9n+8}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<\sqrt{9n+9}, \quad n\in N.$$

(五) 將第六組 $(a,b,c)=(13,22,45)$ 轉換成

$$\Big(\frac{a}{32},\frac{b}{32},\frac{c}{32}\Big)=\Big(\frac{13}{32},\frac{22}{32},\frac{45}{32}\Big)=\Big(\frac{13}{32},\frac{11}{16},\frac{45}{32}\Big),$$

推得底下 (6) 式, (2) 式與 (5) 式

$$2\Big(n+\frac{13}{32}\Big) = 2\sqrt{n^2+\frac{13}{16}n+\frac{169}{1024}} < 2\sqrt{n^2+\frac{13}{16}n+\frac{3n}{16}}$$
$$= 2\sqrt{n(n+1)} < 2\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}} = 2\Big(n+\frac{1}{2}\Big), \tag{6}$$
$$2\Big(n+\frac{11}{16}\Big) = 2\sqrt{n^2+\frac{11}{8}n+\frac{121}{256}} < 2\sqrt{n^2+\frac{11}{8}n+\frac{5}{8}n}$$
$$= 2\sqrt{n(n+2)} < 2\sqrt{n^2+2n+1} = 2(n+1), \tag{2}$$
$$2\Big(n+\frac{45}{32}\Big) = 2\sqrt{n^2+\frac{45}{16}n+\frac{2025}{1024}} < 2\sqrt{n^2+\frac{45}{16}n+(\frac{3n}{16}+2)}$$
$$= 2\sqrt{(n+1)(n+2)} < 2\sqrt{n^2+3n+\frac{9}{4}} = 2\Big(n+\frac{3}{2}\Big), \tag{5}$$

其中利用了 “$n \in N$ 時, $\frac{169}{1024} < \frac{3n}{16}$, $\frac{121}{256} < \frac{5}{8}n$, $\frac{2025}{1024} < \frac{3n}{16}+2$”,

所以 (6) 式+(2) 式+(5) 式可得

$$6n+5 < 2(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}) < 6n+6,$$

不等式同時加上 $3n+3$ 可得

$$9n+8 < 3n+3+2(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}) < 9n+9,$$

進而可推得

$$9n+8 < (\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})^2 < 9n+9,$$

開平方後我們證得

$$\sqrt{9n+8} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} < \sqrt{9n+9}, \quad n \in N.$$

(六) 由 (二) 到 (五) 的討論

我們都可以證得

$$\sqrt{9n+8} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} < \sqrt{9n+9}, \quad n \in N.$$

二、當 $k \in N$ 時, $(3k+1)^2 \equiv 1$ 或 4 或 $7 \pmod 9$, $(3k+2)^2 \equiv 1$ 或 4 或 $7 \pmod 9$, $(3k+3)^2 \equiv 0 \pmod 9$,

又當 $n \in N$ 時, $9n+8 \equiv 8 \pmod 9$.

因此當 $n, k \in N$ 時, $9n+8 \neq (3k+1)^2$, $9n+8 \neq (3k+2)^2$, $9n+8 \neq (3k+3)^2$.

三、當 $k\in N$ 時, $(3k+2)^2\equiv 1$ 或 4 或 $7 (\bmod 9)$, $(3k+4)^2\equiv 1$ 或 4 或 $7 (\bmod 9)$.
又當 $n\in N$ 時, $9n+9\equiv 0 \pmod 9$.
因此當 $n,k\in N$ 時, $9n+9\neq(3k+2)^2$, $9n+9\neq(3k+4)^2$.

四、當 $n\neq k^2+2k$, $k\in N$ 時, $9n+9\neq 9(k^2+2k)+9=(3k+3)^2$, 即 $9n+9\neq(3k+3)^2$.
我們分成三組兩相鄰完全平方數來討論

$$(3k+1)^2 \text{ 與 } (3k+2)^2,\quad (3k+2)^2 \text{ 與 } (3k+3)^2,\quad (3k+3)^2 \text{ 與 } (3k+4)^2.$$

(1) 當 $k\in N$ 且 $(3k+1)^2<9n+8<9n+9<(3k+2)^2$ 時開平方可得

$$3k+1<\sqrt{9n+8}<\sqrt{9n+9}<3k+2,$$

進而推得

$$3k+1=[\sqrt{9n+8}]=[\sqrt{9n+9}].$$

(2) 當 $k\in N$ 且 $(3k+2)^2<9n+8<9n+9<(3k+3)^2$ 時開平方可得

$$3k+2<\sqrt{9n+8}<\sqrt{9n+9}<3k+3,$$

進而推得

$$3k+2=[\sqrt{9n+8}]=[\sqrt{9n+9}].$$

(3) 當 $k\in N$ 且 $(3k+3)^2<9n+8<9n+9<(3k+4)^2$ 時開平方可得

$$3k+3<\sqrt{9n+8}<\sqrt{9n+9}<3k+4,$$

進而推得

$$3k+3=[\sqrt{9n+8}]=[\sqrt{9n+9}].$$

五、當 $n=k^2+2k$, $k\in N$ 時

$$\begin{aligned}3k+3&=\sqrt{9k^2+18k+9}=\sqrt{9(k^2+2k)+9}=\sqrt{9n+9}>\sqrt{9n+8}\\&=\sqrt{9(k^2+2k)+8}>\sqrt{9k^2+12k+4}=3k+2,\end{aligned}$$

因此可得

$$3k+2=[\sqrt{9n+8}]<[\sqrt{9n+9}]=3k+3.$$

六、由四、與五、的討論可得

$$[\sqrt{9n+8}]\le[\sqrt{9n+9}],\quad n\in N.$$

七、由一、與六、的討論可得

$$\sqrt{9n+8} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} < \sqrt{9n+9}, \quad n \in N,$$

且

$$[\sqrt{9n+8}] \le [\sqrt{9n+9}], \quad n \in N,$$

因此我們證得

$$[\sqrt{9n+8}] = [\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}], \quad n \in N.$$

參考文獻

1. 李錦瑩。等式 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}] = [\sqrt{9n+8}]$ 成立嗎? 數學傳播季刊, 39(3), 42-46, 2015。

—本文作者爲國立宜蘭高中退休教師—